

**SET-3****Series BVM/2**कोड नं. **65/2/3**
Code No.रोल नं.

--	--	--	--	--	--	--

Roll No.

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।
Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **11** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं ।
- कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **11** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **29** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित**MATHEMATICS**

निर्धारित समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक : 100

Time allowed : 3 hours

Maximum Marks : 100

65/2/3

1

P.T.O.



सामान्य निर्देश:

- सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- इस प्रश्न-पत्र में 29 प्रश्न हैं जो चार खण्डों में विभाजित हैं: अ, ब, स तथा द। खण्ड अ में 4 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक एक अंक का है। खण्ड ब में 8 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक दो अंक का है। खण्ड स में 11 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक चार अंक का है। खण्ड द में 6 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक छः अंक का है।
- खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकतानुसार दिए जा सकते हैं।
- पूर्ण प्रश्न-पत्र में विकल्प नहीं हैं। फिर भी खण्ड अ के 1 प्रश्न में, खण्ड ब के 3 प्रश्नों में, खण्ड स के 3 प्रश्नों में तथा खण्ड द के 3 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प है। ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है।
- कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है। यदि आवश्यक हो, तो आप लघुगणकीय सारणियाँ माँग सकते हैं।

General Instructions :

- All questions are compulsory.
- The question paper consists of 29 questions divided into four sections A, B, C and D. Section A comprises of 4 questions of one mark each, Section B comprises of 8 questions of two marks each, Section C comprises of 11 questions of four marks each and Section D comprises of 6 questions of six marks each.
- All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.
- There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 1 question of Section A, 3 questions of Section B, 3 questions of Section C and 3 questions of Section D. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.
- Use of calculators is not permitted. You may ask for logarithmic tables, if required.

खण्ड अ

SECTION A

प्रश्न संख्या 1 से 4 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Question numbers 1 to 4 carry 1 mark each.

- वक्रों के कुल, $y = ae^{2x} + 5$ को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए, जहाँ a एक स्वेच्छ अचर है।

Find the differential equation representing the family of curves $y = ae^{2x} + 5$, where a is an arbitrary constant.

- यदि $y = \cos(\sqrt{3x})$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

If $y = \cos(\sqrt{3x})$, then find $\frac{dy}{dx}$.

- यदि A एक वर्ग आव्यूह है जिसमें $A'A = I$ है, तो $|A|$ का मान लिखिए।

If A is a square matrix satisfying $A'A = I$, write the value of $|A|$.

- उस रेखा के दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक अक्षों से समान कोण बनाती है।

अथवा

एक रेखा किसी एक बिन्दु, जिसका स्थिति सदिश $2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ है, से गुज़रती है और सदिश $\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ की दिशा में है। इस रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए।



Find the direction cosines of a line which makes equal angles with the coordinate axes.

OR

A line passes through the point with position vector $2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ and is in the direction of the vector $\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$. Find the equation of the line in cartesian form.

खण्ड ब

SECTION B

प्रश्न संख्या 5 से 12 तक प्रत्येक प्रश्न के 2 अंक हैं।

Question numbers 5 to 12 carry 2 marks each.

5. दर्शाइए कि बिंदु $A(-2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k})$, $B(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ और $C(7\hat{i} - \hat{k})$ संरेख हैं।

अथवा

यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$ है, तो $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ज्ञात कीजिए।

Show that the points $A(-2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k})$, $B(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ and $C(7\hat{i} - \hat{k})$ are collinear.

OR

Find $|\vec{a} \times \vec{b}|$, if $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$.

6. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x-5}{(x-3)^3} e^x dx$$

Find :

$$\int \frac{x-5}{(x-3)^3} e^x dx$$

7. सभी वास्तविक संख्याओं के समुच्चय \mathbb{R} पर परिभाषित संक्रिया $*$: $a * b = \sqrt{a^2 + b^2}$ क्या द्विआधारी है, इसकी जाँच कीजिए। यदि यह द्विआधारी है, तो ज्ञात कीजिए कि क्या यह साहचर्य है या नहीं।

Examine whether the operation $*$ defined on \mathbb{R} , the set of all real numbers, by $a * b = \sqrt{a^2 + b^2}$ is a binary operation or not, and if it is a binary operation, find whether it is associative or not.



8. यदि $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो दर्शाइए कि $(A - 2I)(A - 3I) = 0$.

If $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, show that $(A - 2I)(A - 3I) = 0$.

9. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

अथवा

ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x - 3}{(x - 1)^3} e^x dx$$

Find :

$$\int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

OR

Find :

$$\int \frac{x - 3}{(x - 1)^3} e^x dx$$

10. एक सिक्का 5 बार उछाला गया । (i) 3 बार चित आने की प्रायिकता क्या है ?
(ii) अधिकतम 3 बार चित आने की प्रायिकता क्या है ?

अथवा

दो सिक्कों को एक बार एक साथ उछालने पर चितों की संख्या, X का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए ।

A coin is tossed 5 times. What is the probability of getting (i) 3 heads, (ii) at most 3 heads ?

OR

Find the probability distribution of X, the number of heads in a simultaneous toss of two coins.

11. यदि $P(A \text{ नहीं}) = 0.7$, $P(B) = 0.7$ तथा $P(B/A) = 0.5$ है, तो $P(A/B)$ ज्ञात कीजिए ।
If $P(\text{not } A) = 0.7$, $P(B) = 0.7$ and $P(B/A) = 0.5$, then find $P(A/B)$.



12. वक्रों के कुल $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$, जहाँ A, B स्वेच्छ अचर हैं, को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the differential equation of the family of curves $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$, where A and B are arbitrary constants.

खण्ड स

SECTION C

प्रश्न संख्या 13 से 23 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं।

Question numbers 13 to 23 carry 4 marks each.

13. x के लिए हल कीजिए :

$$\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1}\left(\frac{8}{31}\right)$$

Solve for x :

$$\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1}\left(\frac{8}{31}\right)$$

14. यदि $x = ae^t (\sin t + \cos t)$ और $y = ae^t (\sin t - \cos t)$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$.

अथवा

x के सापेक्ष $x^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$ का अवकलन कीजिए।

If $x = ae^t (\sin t + \cos t)$ and $y = ae^t (\sin t - \cos t)$, then prove that

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

OR

Differentiate $x^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$ with respect to x .

15. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{2 \cos x}{(1 - \sin x)(2 - \cos^2 x)} dx$$

Find :

$$\int \frac{2 \cos x}{(1 - \sin x)(2 - \cos^2 x)} dx$$



16. जाँच कीजिए कि क्या समुच्चय $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ पर परिभाषित संबंध $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ स्वतुल्य, सममित या संक्रामक है।

अथवा

मान लीजिए कि $f : N \rightarrow Y$, $f(x) = 4x + 3$, द्वारा परिभाषित एक फलन है, जहाँ $Y = \{y \in N : y = 4x + 3, \text{ किसी } x \in N \text{ के लिए}\}$ है। सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है। इसका प्रतिलोम फलन भी ज्ञात कीजिए।

Check whether the relation R defined on the set $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ as $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ is reflexive, symmetric or transitive.

OR

Let $f : N \rightarrow Y$ be a function defined as $f(x) = 4x + 3$,

where $Y = \{y \in N : y = 4x + 3, \text{ for some } x \in N\}$. Show that f is invertible. Find its inverse.

17. सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके, दर्शाइए कि

$$\begin{vmatrix} 3a & -a+b & -a+c \\ -b+a & 3b & -b+c \\ -c+a & -c+b & 3c \end{vmatrix} = 3(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Using properties of determinants, show that

$$\begin{vmatrix} 3a & -a+b & -a+c \\ -b+a & 3b & -b+c \\ -c+a & -c+b & 3c \end{vmatrix} = 3(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

18. यदि, किसी $c > 0$ के लिए, $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \text{ } a \text{ और } b \text{ से स्वतंत्र एक स्थिर राशि है।}$$

If $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$, for some $c > 0$, prove that

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \text{ is a constant independent of } a \text{ and } b.$$



19. वक्र $x^2 = 4y$ पर उस अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दु $(-1, 4)$ से गुज़रता है ।

Find the equation of the normal to the curve $x^2 = 4y$ which passes through the point $(-1, 4)$.

20. सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

अतः

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x + \cos x} dx$$

का मूल्यांकन कीजिए ।

Prove that

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

and hence evaluate

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x + \cos x} dx$$

21. अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$x \frac{dy}{dx} = y - x \tan \left(\frac{y}{x} \right)$$

अथवा

अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} = - \left[\frac{x + y \cos x}{1 + \sin x} \right]$$



Solve the differential equation :

$$x \frac{dy}{dx} = y - x \tan \left(\frac{y}{x} \right)$$

OR

Solve the differential equation :

$$\frac{dy}{dx} = - \left[\frac{x + y \cos x}{1 + \sin x} \right]$$

22. यदि रेखाएँ $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2\lambda} = \frac{z-3}{2}$ और $\frac{x-1}{3\lambda} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-6}{-5}$ परस्पर लम्बवत् हों, तो λ का मान ज्ञात कीजिए। अतः ज्ञात कीजिए कि क्या ये रेखाएँ एक-दूसरे को काटती हैं या नहीं।

If the lines $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2\lambda} = \frac{z-3}{2}$ and $\frac{x-1}{3\lambda} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-6}{-5}$ are perpendicular, find the value of λ . Hence find whether the lines are intersecting or not.

23. सदिशों $\vec{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ और $\vec{c} = \lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ के लिए, सदिश $\vec{b} + \vec{c}$ के अनुदिश मात्रक सदिश व सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ का अदिश गुणनफल 1 है। λ का मान ज्ञात कीजिए और अतः $\vec{b} + \vec{c}$ के अनुदिश मात्रक सदिश भी ज्ञात कीजिए।

The scalar product of the vector $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ with a unit vector along the sum of the vectors $\vec{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ and $\vec{c} = \lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ is equal to 1. Find the value of λ and hence find the unit vector along $\vec{b} + \vec{c}$.



खण्ड द

SECTION D

प्रश्न संख्या 24 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं।

Question numbers 24 to 29 carry 6 marks each.

24. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ के लिए दर्शाइए कि $A^3 - 6A^2 + 5A + 11I = 0$ है।

इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

अथवा

निम्नलिखित समीकरण निकाय

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$2x + y - z = 1$$

$$4x - 3y + 2z = 4$$

को आव्यूह विधि से हल कीजिए।

Show that for the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $A^3 - 6A^2 + 5A + 11I = 0$.

Hence, find A^{-1} .

OR

Using matrix method, solve the following system of equations :

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$2x + y - z = 1$$

$$4x - 3y + 2z = 4$$



25. सिद्ध कीजिए कि एक R त्रिज्या के गोले के अंतर्गत अधिकतम आयतन के बेलन की ऊँचाई $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ है। अधिकतम आयतन भी ज्ञात कीजिए।

Show that the height of the cylinder of maximum volume that can be inscribed in a sphere of radius R is $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. Also find the maximum volume.

26. एक थैले में 5 लाल और 4 काली गेंदें हैं और एक दूसरे थैले में 3 लाल और 6 काली गेंदें हैं। दोनों थैलों में से यादृच्छया एक चुना जाता है और उसमें से यादृच्छया (बिना प्रतिस्थापना) 2 गेंदें निकाली जाती हैं जो कि दोनों लाल पाई जाती हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह गेंदें दूसरे थैले में से निकाली गई हैं।

A bag contains 5 red and 4 black balls, a second bag contains 3 red and 6 black balls. One of the two bags is selected at random and two balls are drawn at random (without replacement) both of which are found to be red. Find the probability that the balls are drawn from the second bag.

27. समाकलन विधि से उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (1, 0), (2, 2) और (3, 1) हैं।

अथवा

समाकलन विधि से, दो वृत्तों $x^2 + y^2 = 4$ तथा $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Using method of integration, find the area of the triangle whose vertices are (1, 0), (2, 2) and (3, 1).

OR

Using method of integration, find the area of the region enclosed between two circles $x^2 + y^2 = 4$ and $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

28. एक कंपनी दो प्रकार का सामान, A और B बनाती है, जिसमें सोने व चाँदी का उपयोग होता है। प्रकार A की प्रत्येक इकाई में 3 g चाँदी व 1 g सोना, तथा प्रकार B की प्रत्येक इकाई में 1 g चाँदी व 2 g सोना प्रयोग में आता है। कंपनी ज्यादा-से-ज्यादा 9 g चाँदी व 8 g सोने का ही प्रयोग कर सकती है। यदि प्रकार A की एक इकाई से ₹ 40 का लाभ व प्रकार B की एक इकाई से ₹ 50 का लाभ कमाया जाता है, तो अधिकतम लाभ अर्जित करने हेतु कंपनी को दोनों प्रकारों की कितनी-कितनी इकाइयाँ बनानी चाहिएँ? उपर्युक्त समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या में परिवर्तित करके आलेख विधि से हल कीजिए तथा अधिकतम लाभ भी ज्ञात कीजिए।



A company produces two types of goods, A and B, that require gold and silver. Each unit of type A requires 3 g of silver and 1 g of gold while that of type B requires 1 g of silver and 2 g of gold. The company can use at the most 9 g of silver and 8 g of gold. If each unit of type A brings a profit of ₹ 40 and that of type B ₹ 50, find the number of units of each type that the company should produce to maximize profit. Formulate the above LPP and solve it graphically and also find the maximum profit.

29. बिन्दुओं, जिनके स्थिति सदिश $\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ हैं, से गुज़रने वाले समतल का सदिश व कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए। उपर्युक्त समतल के समांतर समतल, जो बिन्दु (2, 3, 7) से गुज़रता है, का समीकरण भी लिखिए। अतः, दोनों समांतर समतलों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

अथवा

बिन्दुओं (2, -1, 2) तथा (5, 3, 4) से गुज़रने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए तथा बिन्दुओं (2, 0, 3), (1, 1, 5) तथा (3, 2, 4) से गुज़रने वाले समतल का समीकरण भी ज्ञात कीजिए। रेखा व समतल का प्रतिच्छेदन बिन्दु भी ज्ञात कीजिए।

Find the vector and cartesian equations of the plane passing through the points having position vectors $\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ and $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$. Write the equation of a plane passing through a point (2, 3, 7) and parallel to the plane obtained above. Hence, find the distance between the two parallel planes.

OR

Find the equation of the line passing through (2, -1, 2) and (5, 3, 4) and of the plane passing through (2, 0, 3), (1, 1, 5) and (3, 2, 4). Also, find their point of intersection.